

Inne przekształcenia izometryczne

1. Cele lekcji

a) Wiadomości

1. Zapoznanie uczniów z pojęciem przekształcenia tożsamościowego oraz symetrii z poślizgiem w ujęciu klasycznym oraz częściowo analitycznym, zapoznanie z własnościami tych przekształceń.

b) Umiejętności

1. Uczeń potrafi konstruować obrazy niektórych figur w przekształceniu tożsamościowym oraz w symetrii z poślizgiem.
2. Uczeń potrafi obliczać współrzędne obrazów punktów w przekształceniu tożsamościowym oraz w symetrii z poślizgiem z określonymi parametrami.
3. Badanie przekształceń izometrycznych na podstawie wzoru analitycznego.
4. Uczeń poszukuje argumentacji matematycznej w oparciu o poznaną definicję i wcześniejsze wiadomości.

2. Metoda i forma pracy

Praca indywidualna, praca zespołowa.

3. Środki dydaktyczne

1. Komputer z rzutnikiem multimedialnym.
2. Zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego.

4. Przebieg lekcji

Zapoznanie uczniów z definicjami dwóch przekształceń: przekształcenia tożsamościowego oraz symetrii z poślizgiem (wypowiedź słowna, wprowadzenie nazewnictwa):

Przekształceniem tożsamościowym nazywamy takie przekształcenie, w którym obrazem dowolnego punktu X jest ten sam punkt, tzn. $P_t(X) = X$.

$$S_p = S_a \circ T_{\vec{w}}, \text{ gdzie } \vec{w} \parallel a.$$

Następnie uczniowie samodzielnie, w oparciu o podane definicje, konstruują obraz punktu w obu przekształceniach (najpierw w przekształceniu tożsamościowym, potem w symetrii z poślizgiem). Jeden z uczniów charakteryzuje przekształcenie tożsamościowe zgodnie z następującymi poleceniami (jednakowymi dla obu przekształceń):

- Czy przekształcenie tożsamościowe i symetria z poślizgiem są przekształceniami geometrycznymi?
- Znajdź punkty stałe obu przekształceń.

- Wyznacz zbiór wartości obu przekształceń.
- Scharakteryzuj odcinki XX' , przy wszelkich położeniach punktu X dla przekształcenia tożsamościowego i symetrii z poślizgiem.
- Co może być obrazem prostej, okręgu, trójkąta w obu przekształceniach?
- Czy można wskazać takie dwa punkty X i Y , aby $XY \neq X'Y'$ w obu przekształceniach?
- Jak jest przekształcenie odwrotne do przekształcenia tożsamościowego i do symetrii z poślizgiem?

Odpowiedzi na powyższe pytania powinny być poparte jakąś argumentacją.

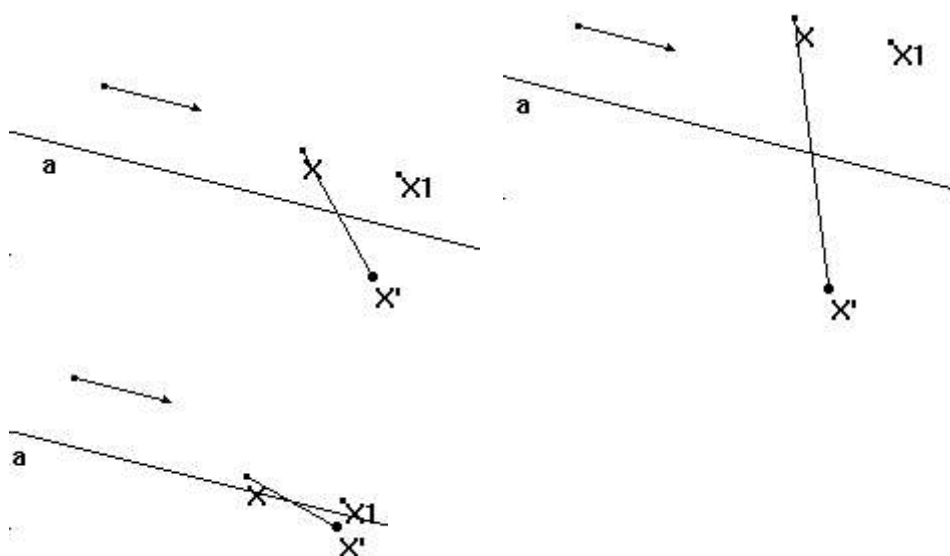
W wyniku pracy zostaje wypracowana następująca charakterystyka przekształcenia tożsamościowego:

- ✓ Jest to przekształcenie geometryczne.
- ✓ Każdy punkt płaszczyzny jest punktem stałym..
- ✓ Zbiorem wartości jest cała płaszczyzna.
- ✓ Odcinki XX' (przy wszelkich położeniach punktu X) są zawsze odcinkami zerowymi.

$$X = X'$$

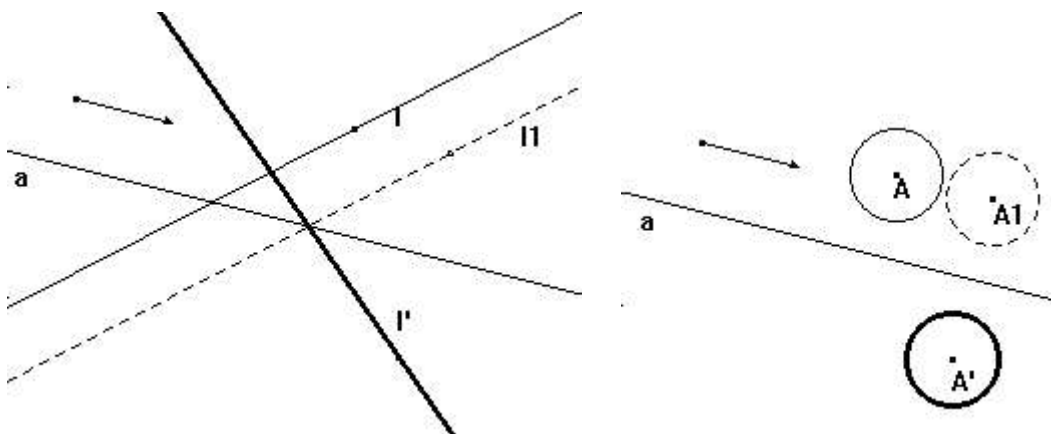
- ✓ Obrazem prostej jest ta sama prosta. Obrazem okręgu jest ten sam okrąg. Obrazem dowolnej figury jest zawsze ta sama figura.
- ✓ Przekształcenie tożsamościowe jest przekształceniem izometrycznym.
- ✓ Przekształceniem odwrotnym do przekształcenia tożsamościowego jest to samo przekształcenie.

Następnie przechodzimy do pracy nad symetrią z poślizgiem. Nauczyciel wykonuje konstrukcje „na oczach” uczniów na komputerze (wystarcza program CABRI 1) wyjaśniając dobór elementów koniecznych do zaistnienia przekształcenia (tzn. prostej i wektora do niej równoległego) oraz na czym polega złożenie i jak się je wykonuje. Następnie porusza punktem X – uczniowie obserwują obraz X' . Dodatkowo uczący zaznacza odcinek XX' .



Uczniowie początkowo pracują samodzielnie w poszukiwaniu odpowiedzi na postawione pytania, potem tworzą grupy czteroosobowe (dwie sąsiednie ławki) i uzgadniają wspólne stanowisko.

Następnie przechodzimy do wymiany poglądów. Pojawiają się także na ekranie obrazy prostej, okręgu w symetrii z poślizgiem konstruowane na zasadzie „miejsca geometrycznego punktu”.



Uzgodniona charakterystyka symetrii z poślizgiem:

- ✓ Jest to przekształcenie geometryczne.
- ✓ Nie ma punktów stałych (uczniowie zauważają, że znaczącą w tym aspekcie rolę odegrała translacja, a nie symetria osiowa).
- ✓ Zbiorem wartości jest cała płaszczyzna.
- ✓ Odcinki XX' (przy wszelkich położeniach punktu X) są różnej długości: od długości danego wektora, do dowolnie dużej, przez środek każdego z tych odcinków przechodzi prosta a .
- ✓ Obrazem prostej jest prosta, tylko w szczególnych sytuacjach równoległa do danej (wyjściowa prosta musi być równoległa lub prostopadła do prostej a). Obrazem okręgu jest okrąg o tym samym promieniu.
- ✓ Symetria z poślizgiem jest przekształceniem izometrycznym (uczący podaje informacyjnie: wynika to ze złożenia dwóch przekształceń izometrycznych).
- ✓ Przekształceniem odwrotnym do symetrii z poślizgiem jest symetria z poślizgiem z wektorem przeciwnym do danego.
- ✓ Dodatkowa własność: symetria z poślizgiem jest złożeniem, w którym zachodzi przemienność przekształceń, tzn.: $T_w \circ S_a = S_a \circ T_w$.

Kolejny etap lekcji dotyczy obu przekształceń w układzie współrzędnych. Dla przekształcenia tożsamościowego uczniowie od razu formułują wniosek: Obrazem punktu $A(x, y)$ jest ten sam punkt $A(x, y)$. W przypadku symetrii z poślizgiem uczniowie formułują wnioski w zależności od doboru parametrów związanych z prostą a w symetrii osiowej. Wówczas obrazem punktu $A(x, y)$ jest:

1. Prosta a to oś rzędnych, wektor $\vec{w} = [0, q]$, $A'(-x, y + q)$,
2. Prosta a to oś odciętych, wektor $\vec{w} = [p, 0]$, $A'(x + p, -y)$,
3. Prosta a ma równanie $x = k$, wektor $\vec{w} = [0, q]$, $A'(2k - x, y + q)$,
4. Prosta a ma równanie $y = k$, wektor $\vec{w} = [p, 0]$, $A'(x + p, 2k - y)$,
5. Prosta a ma równanie $y = x$, wektor $\vec{w} = [p, p]$, $A'(y + p, x + p)$.

Ćwiczenie: Zbadaj czy przekształcenia zadane wzorami są izometriami?

- $P((x, y)) = (-y + 3, x + 5)$ - to przekształcenie jest izometrią: można wykonać odpowiedni rachunek lub dobrać przekształcenia i wykonać ich złożenie (w tym wypadku, np. obrót o kąt 90° oraz translacja o wektor $[3, 5]$).
- $P((x, y)) = (2x + 1, y - 5)$ - to przekształcenie nie jest izometrią: warto posłużyć się kontrprzykładem.

5. Bibliografia

1. Konior J., *Repetitorium z CABRI, część II*, [w:] „Matematyka i Komputery” nr 11, 2002, s. 5-8.
2. Pająk W., *Badanie przekształceń geometrycznych*, [w:] „Nauczyciele i Matematyka” nr 8, 1993, s. 22-23.
3. Pająk W., *CABRI i przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie*, VULCAN, Wrocław 1994.
4. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żylak K., *Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.
5. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żylak K., *Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.

6. Załączniki

a) Zadanie domowe

1. Przykłady przekształceń zadanych wzorami: $P((x, y)) = (y + 1, x + y)$,
 $P((x, y)) = (y - 1, -x + 2)$.
2. Kilka zadań ze zbioru zadań: strona 181.

7. Czas trwania lekcji

2 godziny lekcyjne

8. Uwagi do scenariusza

brak